

Минин, Нудник - "Основы мат. анализа" (2д)

Композиторов, Фомин - "Элементы теории функций и функц. анализа"

Москертник, Соболев - "Элементы функц. анализа"

Оган - "Сборник задач по функ. анализу"

Монтышева, Пошнина - "Задачи по ТФ и ФА"

§1. Открытые и замкнутые множества на прямой

1. Объединение (сумма) множеств - $E_1 \cup E_2$
2. Пересечение (произведение) мн-в - $E_1 \cap E_2$
3. Разность множеств $E_1 \setminus E_2$
4. Симметр. разность мн-в $E_1 \Delta E_2$
5. Дополнение $CE = \bar{E} = \mathbb{R} \setminus E$

Опр. Т. x_0 - пределная т. мн-ва E , если $\forall$ окр. этой точки (т.е. в интервале, соед. x_0) $\exists$ хотя бы одна т. $x \neq x_0 \in E$.

Опр. Т. $x_0 \in E$, но не пределная, то она - изолированная

Опр. Мн-во всех пределных точек E - E' - проверное мн-во мн-ва E

1. Если $E' \subset E$, то E - замкнутое
2. Если $E \subset E'$, то E - открытое в себе
3. Если $E = E'$, то E - совершенное
4. $\bar{E} = E \cup E'$, $\bar{E}$ - замкнутые мн-ва E

Примеры 1) $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{n} \right\}$, $E' = \{0\}$

2) $F = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{n} \right\}$, $E = F \cup \{0\}$, $E' = \{0\}$ - E - замкнутое

3) $\mathbb{Q}$ - рац. числа, $E' = \mathbb{R}$

4) $E = (a, b)$, $E' = [a, b]$

5) $E = [a, b]$, $E' = [a, b]$

Опр. x_0 - внутренняя т. мн-ва E , если она принад. мн-ву вместе с некоторой своей окрестностью.

Опр. Если мн-во состоит только из внутр. точек, то оно открытое.

- Утверждение 1. E - открыто $\Rightarrow$ CE - замкнуто
 2. E - замкнуто $\Rightarrow$ CE - открыто
 3. конечное пересечение открытых - открытое.
 4. бесконечное - не факт - $\bigcap_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) = \{0\}$
 5. $\bigcup$ открытых - открытое
 6. $\bigcap$ замкнутых - замкнуто (п. 2 + п. 5)
 7. A - открытое, F - замкнутое $\Rightarrow$
 $\Rightarrow A \setminus F$ - открытое, $F \setminus A$ - замкнутое

Теорема 1. $\bigcup$ открытых мн-во на прямой представимо в виде конечного или счётного кол-ва попарно непересекающихся интервалов.

$\bigcup$ отр. $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$, где $I_n = (a_n, b_n)$

О-во: E открыто $\Rightarrow \forall x$ - внутренняя
 $V(x)$ - объединение всех интервалов $(a, b):$
 $x \in (a, b), (a, b) \in E \Rightarrow V(x)$ - интервал?

Пусть $a = \inf V(x), b = \sup V(x), a, b \notin V(x)$

Возьмём $y: a < y < x, \exists y': a < y' < y < x$
 (или $x < y < b, \exists x < y' < x < y < b$)

$\exists$ отр. x : она соед. x и y' , $\exists$ интервал $\Rightarrow$
 $\Rightarrow$ он соед. $y \Rightarrow V(x) \ni y$
 $\forall x_1, x_2 \in E$

Мн-ва $V(x_1)$ и $V(x_2)$ либо не пересекаются, либо совпадают.

$\bigcup$ мн-во соед. хотя бы одну рач. точку, они не пересекаются $\Rightarrow$ разложим на более, чем счётное количество $\Rightarrow$ общее объединение - открытое, т.к. не более чем счётное объединение открытых мн-в.

Канторово множество

$E = [0, 1]$ $G_1 = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ - выбрасываем

$G_2 = (\frac{1}{9}, \frac{2}{9}), G_3 = (\frac{7}{9}, \frac{8}{9})$ - выбрасываем

$\bigcup$ раз выбрасываем среднюю треть единичного

$G = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$ $K = E \setminus G$ - канторово множество

$$\frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{9} + 4 \cdot \frac{1}{27} + \dots = \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 1$$

Рассм. число в тр.с/с: $0, a_1 a_2 \dots, a_n \in \{0, 1\}$
 В G_k в числе на k -ой месте стоит 1.
 Значит, ~~все~~ все числа, состоят из 0 и 2.
 лежат в K . Следовательно, K - континуум
 но имеет меру 0.

§2. Мера Лебега Универсальное множество

Опр. Открытое мн-во E - система $S(E)$ счётного кол-ва интервалов, объединение которых содержит E .

$$S(E) = \{I_n\}_{n=1}^{\infty}, I_n = (a_n, b_n) : E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$$

$$\sigma(S) = \sum_{n=1}^{\infty} |I_n| - \text{длина покрытия} (?)$$

$$|E|^* = \inf_{S(E)} \sigma(S) - \text{внешняя мера}$$

В-ва внешней меры

1. $E_1 \subset E_2 \Rightarrow |E_1|^* \leq |E_2|^*$
 (в покрытие E_2 есть покрытие E_1)

2. $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \Rightarrow |E|^* \leq \sum_{n=1}^{\infty} |E_n|^*$ (полу-аддитивность)

$$\mu_0 / \rho_0|^* = \mu, \quad 1 = \sum_{n=0}^{\infty} \mu - ?$$

Возьмем $k > 1/\mu$ $\bigcup_{n=0}^{k-1} \rho_n \subset C \Rightarrow$
 $\Rightarrow |\bigcup_{n=0}^{k-1} \rho_n|^* = k\mu > 1 \Rightarrow ?!$

Опр. Непустая система мн-в на-ор коммутатив, если она замкнута отн. операций пересечения и разности двух мн-в шиммеринской

Свойства: 1) $A \cup B = (A \cap B) \Delta (A \setminus B)$
 2) $A \setminus B = A \Delta (A \cap B)$
 3) $\emptyset =$

Есть кольцо K , E - единица:
 $\forall A \in K, E \cap A = A$

Кольцо с единицей - б-алгебра

Опр. Полукольцо - система мн-в:

- 1) замкнута отн. пересечения
- 2) $\emptyset \in$ полукольцо
- 3) $A \in PK, A_i \subset A, A_i \in PK, \exists A_2, \dots, A_n \in PK:$
 $A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j, A = \bigcup_{i=1}^n A_i$

$\forall$ кольцо - полукольцо.

Пример полу-кольцо мн-в всех полуинтервалов, интервалов, сегментов

Мера строится на полу-кольце и преобразуется на кольцо

Мера Лебга - Вильямса $\mu[a, b] = F(b+0) - F(a)$

Мера Лебга: $F(x) = x \rightarrow \mu(a, b) = F(b) - F(a+0)$

Введем систему прямоугольников.
 Мера - площадь

Опр. Мн-во мн-во - если оно имеет предел. обзв. непрерыв. прямоугольников

Опр. Система замк. мн-в - кольцо

Мера аддитивна: $E = \bigcup E_i \Rightarrow \mu(E) = \sum \mu(E_i)$

Опр. Полукольцо мн-в A_i мн-в A_i - система отк. мн-в $A_i: A \subset \bigcup A_i$

Лемма (Гейтс-Кантони)

Если A - компакт то он Δ покрывается мн-вом конечных мн-в.

Опр. Внешняя мера A - $\inf \mu(\text{покрытие } A \text{ мн-в } A_i)$

Опр. Мн-во измеримо, если оно имеет внеш. меру. Можно приблизить обзв. мн-в.

Абстрактная мера

Опр. на полу-кольце, аддитивная действ. значная неотр. ф-ция.

Пример: $A_{[a,b]} = \mathbb{Q} \cap [a,b], A_{(a,b]} = \mathbb{R} \cap (a,b]$
 $\mu(A_{[a,b]}) = b-a$, мера точки = 0
 $\mu(A_{[a,b]}) = 1$ и $= 0 \Rightarrow$ б-аддитивности!

§3. Измеримые функции

$$E[f > a] = \{x \in E \mid f(x) > a\}$$

Опр. Опр. на мн-ве мн-в ф-ция $f(x)$ измерима (по Лебгу) если $\forall a \in \mathbb{R} E[f > a]$ - измеримо

Св-ва:

I. f измерима $\Leftrightarrow \forall a \in \mathbb{R}$ любое из мн-в $E[f > a], E[f < a], E[f \leq a]$ было измерим.

$$E[f > a] = \bigcup_{n=1}^{\infty} E[f \geq a + \frac{1}{n}] - \text{изм. по т. 2}$$

$$E[f > a] = \bigcap_{n=1}^{\infty} E[f > a - \frac{1}{n}] - \text{измеримо}$$

$$E[f < a] = E \setminus E[f \geq a]$$

$$E[f \leq a] = E \setminus E[f > a]$$

II. $\forall$ изм. f измерима на $\forall$ изм. подмнож-е измер. мн-ва.

$$E, E_0 \subset E \quad E_0[f \geq a] = E[f \geq a] \cap E_0$$

III. f изм. на $\leq$ счетном мн-ве мер. мн-в $E_i \Rightarrow \Rightarrow$ для изм. на $E = \bigcup E_i$

$$E[f \geq a] = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i[f \geq a]$$

IV. $\forall f$ изм. на мн-ве меры 0

Дир. Дир. на одном мн-ве E функции f, g эквивалентны, если $|E[f \neq g]| = 0$.

V. Если f изм. на E , то и $\forall$ эквив. ей измер. на E .

$$E = E[f = g] \cup E[f \neq g]$$

изм. $\rightarrow$ равна $\rightarrow$ изм. по м. меры 0

Дир. Св-во folgt почти всюду на изм. мн-ве E , если мн-во, на кот. оно не верно, имеет меру 0.

VI. Для любой неизм. f на мн-ве E измер. на изм. мн-ве E .

мн-во δ разрыва меры 0 $\Rightarrow$ измерима f - замкнуто, f - непрерывно $\Rightarrow$ $E[f \geq a]$ - замкнуто $\forall a \in \mathbb{R} \Rightarrow$ [7.8] $\Rightarrow$ $E[f \geq a]$ - измерима и $\Rightarrow f$ - измерима на ком .

Замечание. ~~Для~~ почти всюду непрерывно $\neq$ экв. непрерывности. Директ. почти всюду разрыва $\sim f = 0$

Теорема 1. Если f - измерима на E , то $|f|, f+c, c \cdot f$ - измеримые функции на E . Если g - тоже изм., то $E[f > g]$ - измерима.

Д-во: 1. $E[|f| > a] = \begin{cases} E[f > a] \cup E[f < -a], & a > 0 \\ E, & a = 0 \end{cases}$

2. $E[f+c > a] = E[f > a-c]$

3. $E[cf > a] = \begin{cases} E[f > a/c], & c > 0 \\ E[f < a/c], & c < 0 \\ \emptyset, & c = 0 \end{cases}$

4. $D = \{r_k\}_{k=1}^{\infty} \quad E[f > g] = \bigcup_{k=1}^{\infty} E[f > r_k] \cap E[g < r_k]$

Теорема 2. Если f, g - изм. на E , то $f+g, f-g, f \cdot g, f/g (g \neq 0)$ - измеримы на E .

Д-во: 1. $E[f \pm g \geq a] = E[f \geq \mp g + a]$

2. $f \cdot g = \frac{(f+g)^2 - (f-g)^2}{4}$ (f^2 - изм., g^2 - изм., $f \pm g$ - изм.)

3. $E[\frac{f}{g} > a] = \begin{cases} E[g > 0] \cap E[f > a \cdot g], & a > 0 \\ E[g < 0] \cap E[f < a \cdot g], & a < 0 \\ E[g > 0] \cup E[g < 0], & a = 0 \end{cases}$

$$\frac{f}{g} = f \cdot \frac{1}{g}$$

Теорема 3. $\{f_n(x)\}$ - изм. на E функции. $\bar{f}_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x), \underline{f}_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ - измеримы на E .

Д-во: $\varphi(x) = \inf_{n \in \mathbb{N}} f_n(x), \psi(x) = \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n(x)$.

$$E[\varphi < a] = \bigcup_{n=1}^{\infty} E[f_n < a], \quad E[\varphi > a] = \bigcup_{n=1}^{\infty} E[f_n > a] \Rightarrow$$

$\Rightarrow \varphi$ и φ измеримы

$$f_n = \inf_{k \geq n} \sup_{k \geq n} f_k(x), \quad f_n = \sup_{k \geq n} \inf_{k \geq n} f_k(x) \Rightarrow \text{измерим}$$

Теорема 4 Пусть $\{f_n\}$ изм. ф-ции на E и $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x)$, тогда $f(x)$ - измерима на E .

Д-во: Нет сх-ты $\Rightarrow$ мин-во мер 0
 или сх-та $\Rightarrow f_n = f \Rightarrow$ измерима

Опр. $\{f_n\}$ изм. и.в. сходится по мере к $f(x)$ - изм. на E , если
 $\forall \varepsilon > 0 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} |E[f_n - f]| \geq \varepsilon = 0$, т.е.
 $\forall \varepsilon > 0, \forall \delta > 0 \exists N = N(\delta, \varepsilon): \forall n \geq N |E[f_n - f]| < \delta$

Теорема 5 (Лебег)

Пусть E - изм. мн-во конечной меры
 изм. $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x)$ почти всюду $\Rightarrow$ почти всюду
 $\Rightarrow f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x)$ по мере. (f_n и f - конечны)

Пример: $|E| = \infty$
 $f_n(x) = \begin{cases} 1, & x \in [n, n+1] \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}, \quad f_n(x) \rightarrow 0$
 а сх-та по мере нет.

Д-во: Введем мн-ва: $A_n = E[|f_n| = +\infty]$
 $A = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$
 $A_0 = E[|f| = +\infty]$

$$B = E[\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \neq f(x)], \quad C = A \cup B \Rightarrow |C| = 0$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad E_n = E[|f_n - f| \geq \varepsilon]$$

$$R_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k, \quad R = \bigcap_{n=1}^{\infty} R_n$$

$$R_n \setminus R = \bigcup_{k=n}^{\infty} (R_k \setminus R_{k+1}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |R_n \setminus R| = \sum_{k=n}^{\infty} |R_k \setminus R_{k+1}| \Rightarrow |E| < \infty \Rightarrow \text{по сх-те}$$



$$\Rightarrow |R_n \setminus R| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \quad R_n = R \cup (R_n \setminus R) \Rightarrow |R_n| \rightarrow |R|$$

Обратно, если $|E_n| \leq |R_n|$

~~Возьмем~~ Возьмем $x_0 \notin C$. $\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n \geq N$
 $|f_n(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon \Rightarrow x_0 \notin E_n \Rightarrow x_0 \notin R_n \Rightarrow x_0 \notin R$
 $\Rightarrow \{?\} \Rightarrow R \subset C \Rightarrow |R| = 0 \Rightarrow |E_n| \rightarrow 0$

Пример $E = [0, 1], \quad E_1 = [0, 1/2], \quad E_2 = [1/2, 1]$

$$f_1(x) = \begin{cases} 1, & x \in E_1 \\ 0, & x \in E \setminus E_1 \end{cases}, \quad f_2(x) = \begin{cases} 1, & x \in E_2 \\ 0, & x \in E \setminus E_2 \end{cases}$$



Получим делим E на 4 части и аналогично
 определим $f_3, f_4, \dots$, потом на 8 частей и др.
 $\{f_n\}$ по мере сход к нулю, но скорость нет
 ни в одной точке.

Теорема 6 (Рисса)

Пусть $|E| < +\infty$ и $\{f_n(x)\}$ - почти всюду
 конечные, измеримые функции - сходятся по
 мере к изм. почти всюду конечной $f(x)$,
 тогда $\exists f_n \quad f_{n_k}(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x)$

Д-во: Обозн. $E_k = E[|f_{n_k}(x) - f(x)| > 1/k], \quad |E_k| < 1/2^k$
 т.е. если сх-та по мере (т.е. для $\varepsilon = 1/2^k \exists n_k$)

$$R_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k, \quad R = \bigcap_{n=1}^{\infty} R_n, \quad |R_n| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} |R|$$

$$|R_n| \leq \sum_{k=n}^{\infty} |E_k| \leq \frac{1}{2^{n-1}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow |R| = 0$$

Ост. г-ва, что для R нет сходимости:
 $x_0 \notin R \Rightarrow x_0 \notin R_N \Rightarrow x_0 \notin E_k, \quad k \geq N \Rightarrow |f_{n_k}(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon$

Теорема 7 (о единств. экв. по мере)
 $f_n \xrightarrow{\text{по мере}} f(x), f_n \xrightarrow{\text{по мере}} g(x) \Rightarrow f(x) \sim g(x)$

Д-во: $E[|f-g| \geq \epsilon] \subset E[|f_n - f| \geq \epsilon/2] \cup E[|f_n - g| \geq \epsilon/2] \Rightarrow$

$$\Rightarrow \forall \epsilon > 0 \quad |E[|f-g| \geq \epsilon]| = 0$$

$$E[|f-g|] = \lim_{n \rightarrow \infty} E[|f_n - g|] = 0$$

Теорема 8 (Егорова)

Пусть $|E| < +\infty$, $f_n \xrightarrow{\text{н.в.}} f(x)$, где f_n, f — измеримы, и.в. конечны, тогда $\forall \delta > 0 \quad \exists E_\delta \subset E$:
 $|E_\delta| > |E| - \delta$ и $f_n(x) \xrightarrow{\text{н.в.}} f(x)$ на E_δ

Теорема 9 (Левина)

Пусть на изм. E зад. изм. и.в. конечная $f(x)$, тогда $\forall \epsilon > 0 \quad \exists \psi(x) \in C[E]$ (непрерывная):
 $|E[f(x) \neq \psi(x)]| < \epsilon$. Если, дополнительно,
 $|f(x)| \leq K \Rightarrow |\psi(x)| \leq K$.

§4. Интеграл Лебега

1. Инт. Лебега от функц. на
изм-ве конечной меры

$$|E| < +\infty, |f(x)| \leq M$$

Разбиение τ изм-ва E : $\{E_k\}_{k=1}^n: \bigcup_{k=1}^n E_k = E$
 $E_i \cap E_j = \emptyset, i \neq j$

Верхняя сумма: $S_\tau = \sum_{k=1}^n M_k |E_k|, M_k = \sup_{E_k} f(x)$
 Нижняя сумма: $s_\tau = \sum_{k=1}^n m_k |E_k|, m_k = \inf_{E_k} f(x)$

Верхний интеграл: $\bar{I} = \inf_{\tau} S_\tau$

Нижний интеграл: $\underline{I} = \sup_{\tau} s_\tau$

Опр. Если $\bar{I} = \underline{I}$, то $\bar{I} = \underline{I} = I = \int f(x) dx$ —
интеграл Лебега от функц. $f(x)$ по
изм-ву E .

Второе применение τ^* разбиения τ^* :

$\tau^*: \{E_k^*\}_{k=1}^m, T: \{E_k^*\}_{k=1}^m, \bigcup_{k=1}^m E_k^* = E$
 и 1) $\forall e: 1 \leq e \leq m \quad \exists \nu(e): 1 \leq \nu(e) \leq n$ и $E_e^* \subset E_{\nu(e)}$
 2) $\bigcup_{\nu(e)=k} E_e^* = E_k$

Применение разбиений $T = T_1 \times T_2$

$T_1: \{E_k^1\}_{k=1}^n, T_2: \{E_k^2\}_{k=1}^n, T: \{E_k^1 \cap E_k^2\}$

Утверждение: $S_{T^*} \leq S_T, S_{T^*} \geq s_T$

Д-во: $S_{T^*} = \sum_{e=1}^m M_e^* |E_e^*| = \sum_{k=1}^n \sum_{\nu(e)=k} M_e^* |E_e^*| \leq \sum_{k=1}^n \sum_{\nu(e)=k} M_k |E_e^*| = \sum_{k=1}^n M_k |E_k| = S_T$

Утверждение: $\forall T_1, T_2, S_{T_1} \leq S_{T_2}$
 Д-во: $T = T_1 \times T_2 \Rightarrow S_T \leq S_{T_1} \leq S_{T_2}$

Теорема 1 Если $f(x)$ интегрируема по Риману
 на $[a, b]$, то она интегрир. и по Лебегу, и
 их интегралы совпадают.

Д-во: Разбиение Римана — частный случай
 разбиения Лебега $\Rightarrow \underline{I}_R \leq \underline{I}_L \leq \underline{I}_R \leq \bar{I}_R \Rightarrow$
 $\Rightarrow \{ \underline{I}_R = \bar{I}_R \} \Rightarrow \underline{I}_L = \underline{I}_R = I = \bar{I}_R = \bar{I}_L$

Пример: ф-ция Дирихле (не инт. по Риману)
 $E = [0, 1], f(x) = \begin{cases} 0, & x \notin \mathbb{Q} \\ 1, & x \in \mathbb{Q} \end{cases}$
 $\bar{I}_R = 1, \underline{I}_R = 0$

$T: E_1 = E \cap \mathbb{Q}, E_2 = E \setminus E_1$
 $S_T = 1 \cdot |E_1| + 0 \cdot |E_2| = 0 = s_T \Rightarrow \underline{I}_L = 0$

Теорема 2 (Лебега) измер.
 Если о.р. $f(x)$ измерима на изм-ве конечной
 меры, то она интегрир. по Лебегу на нем.

Д-во: $m \leq f(x) \leq M, m = y_0 < y_1 < \dots < y_n = M$
 (разбиваем не о.р. функцию а од. измеримую
 определителю)

$E_1 = E[y_0 \leq f(x) \leq y_1], \dots, E_k = E[y_{k-1} \leq f(x) \leq y_k]$
 (мн-ва не имеют пересечения)
 Очевидно, $y_{k-1} \leq m_k \leq M_k \leq y_k \Rightarrow$

$$\sum_{k=1}^n y_{k-1} |E_k| \leq S_T \leq S_T \leq \sum_{k=1}^n y_k |E_k| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 \leq S_T - S_T \leq \sum_{k=1}^n (y_k - y_{k-1}) |E_k| \leq \delta \cdot |E|, \text{ где } \delta - \text{ диаметр разбиения} \Rightarrow \delta \rightarrow 0 \Rightarrow 0$$

Свойства:

1. $\int_E dx = |E|$ (гол-ва по определению)

2. $\int_E \alpha \cdot f(x) dx = \alpha \cdot \int_E f(x) dx, \alpha = \text{const}$

3. $\int_E [f_1(x) + f_2(x)] dx = \int_E f_1(x) dx + \int_E f_2(x) dx$

4. $E = E_1 \cup E_2, E_1, E_2 = \emptyset \Rightarrow \int_E f(x) dx = \int_{E_1} f(x) dx + \int_{E_2} f(x) dx$

5. $f_1 \leq f_2 \Rightarrow \int_E f_1 dx \leq \int_E f_2 dx. (E = E_{\text{лев}} \cup E_{\text{прав}})$

2. Интеграл Лебега от неотриц. функ. измеримой на измер. мн-ве конечной меры

$|E| < \infty, f(x) \geq 0.$

Опр. Срезка функции:
 $f_N(x) = \begin{cases} f(x), & f(x) \leq N \\ N, & f(x) > N \end{cases}$

$E[f_N > a] = \begin{cases} E[f > a], & a < N \\ \emptyset, & a \geq N \end{cases}$

Введем $I_N = \int_E f_N(x) dx$

Опр. Если $\exists \lim_{N \rightarrow \infty} I_N = I < \infty$, то говорят, что неп. или функ. суммируема (интегрируема) по Лебегу на E , а I - интеграл

Теорема 3 (полная аддитивность интеграла)

Пусть $|E| < \infty$ и $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i, E_i \cap E_j = \emptyset, i \neq j$

Если 1) или $f(x)$ суммируема на E , то она сумм. на всех E_i и $\int_E f(x) dx = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{E_i} f(x) dx$ (*)

2) или $f(x)$ суммируема на всех E_i , то она сумм. на E и выполнено равенство (*)

Д-во: а) $f(x) \leq M$ (предположим)

Обозн. $R_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k, |E| < \infty \Rightarrow |R_n| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$

$\int_E f(x) dx - \sum_{k=1}^n \int_{E_k} f(x) dx = \int_{R_n} f(x) dx \leq M |R_n| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$

б) 1. $\int_E f_N(x) dx = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{E_i} f_N(x) dx \subseteq$ - по неравенству

монотонности? монотонности: $\int_{E_n} f_N(x) dx \leq \int_{E_n} f(x) dx \leq \int_E f(x) dx$

$\subseteq \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} f(x) dx$

$\int_E f_N dx \geq \sum_{n=1}^m \int_{E_n} f_N dx \Rightarrow \{N \rightarrow \infty\} \Rightarrow \int_E f(x) dx \geq \sum_{n=1}^m \int_{E_n} f(x) dx \Rightarrow$
 $\Rightarrow \{m \rightarrow \infty\} \Rightarrow \int_E f(x) dx \geq \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} f(x) dx$

2. Из пер-ва $\subseteq$ вытекает суммируемость функции на E .

Теорема 4 (адд. неравенство интеграла)

Пусть $|E| < \infty, f(x) \geq 0$ - измерима. Если она суммируема, то $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \exists E \subset E$ - изм. измер. $|E| < \delta \Rightarrow \int_E f(x) dx < \varepsilon$

Д-во: $\forall \varepsilon > 0 \exists N: \int_E [f - f_N] dx < \frac{\varepsilon}{2}$

$\int_E f(x) dx = \int_E [f - f_N] dx + \int_E f_N dx \leq \frac{\varepsilon}{2} + N \cdot |E| < \frac{\varepsilon}{2} + N \cdot \frac{\varepsilon}{2N} = \varepsilon$

Теорема 5 Если $\int_E f dx = 0$, $f(x) \geq 0$, то $f \equiv 0$ на E .

Замечание: суммир. ф-ция может быть неограничена только на мн-ве меры 0.

$$E[f = \infty] = E_0$$

$$\int_E f_N dx \geq \int_{E_0} f_N dx \geq N \cdot |E_0| - ? \text{ (непостоянно)}$$

Д-во: $a > 0$, $E_a = E[f > a]$

$$\int_E f dx \geq \int_{E_a} f dx \geq a \cdot |E_a| \Rightarrow |E_a| \leq \frac{1}{a} \int_E f dx \xrightarrow{a \rightarrow \infty} 0$$

Теорема 6. $|E| < \infty$, $0 \leq f_1 \leq f_2$

$$\int_E f_{1N} dx \leq \int_E f_{2N} dx \leq \int_E f_2 dx \leq \left(\int_E f_1 dx \leq \int_E f_{2N} dx \right)$$

3. Инт. Лебга на мн-ве конечной меры ст. измеримой функцией произвольного знака

$$f^+(x) = \frac{|f(x)| + f(x)}{2} \quad f^-(x) = \frac{|f(x)| - f(x)}{2}$$

Опр. Если f^+ и f^- сумм. на E , то говорят, что f сумм. на E , а интеграл ее равен

$$\int_E f dx = \int_E f^+ dx - \int_E f^- dx$$

Замечание. Условная сходимость отсутствует, т.к. $|f| = f^+ + f^-$, а в обратную сторону - матричной признак (т.б.) - $f^{\pm} \leq |f(x)|$

Теорема аналогичное, однако добавляется модуль, т.к. теперь появились отрицат. значения.

Опр. Совокупность всех ф-ций, суммир. на мн-ве E будем называть $L(E)$.

Опр. Будем говорить, что $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L(E)} f$ (по с-ти $L(E)$), если $\int_E |f_n - f| dx \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$

Измерные почленные интегрирование:

$$\left| \int_E f_n dx - \int_E f dx \right| \leq \int_E |f_n - f| dx \Rightarrow \int_E f_n dx \rightarrow \int_E f dx$$

Возьмем $\forall \varepsilon > 0$ $E_n = E[|f_n - f| \geq \varepsilon]$

$$\int_E |f_n - f| dx \geq \int_{E_n} |f_n - f| dx \geq \varepsilon |E_n| \Rightarrow |E_n| \leq \frac{1}{\varepsilon} \int_E |f_n - f| dx$$

Пример: $E = [0, 1]$ $f_n(x) = \begin{cases} n, & x \in (0, 1/n) \\ 0, & x \in [1/n, 1] \end{cases}$?

Теорема 7 (Лебга)

$|E| < \infty$. $\{f_n\}$ - н.б. конечное или бесконечное мн-во ф-ций: $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{по м-ре}} f(x)$ - н.б. кон. измерима. и пусть $\forall n$ почти всюду $|f_n(x)| \leq F(x)$ - сумм. на E тогда $f_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} f(x)$ в $L(E)$.

Д-во. $\int \{f_n\}$: $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} f(x) \Rightarrow \{\text{прям. переход}\} \Rightarrow |f(x)|$

$\Rightarrow f(x)$ - тоже суммируема.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad E_n = E[|f_n - f| \geq \varepsilon], \quad |f_n - f| \leq 2F(x)$$

$$\int_E |f_n - f| dx = \int_{E_n} |f_n - f| dx + \int_{E_n^c} |f_n - f| dx \leq$$

$$\leq 2 \int_{E_n} F(x) dx + \varepsilon \cdot |E| \quad \textcircled{A}$$

Если с-ть по мере $\Rightarrow |E_n| \rightarrow 0$ + непр. интеграл

$$\textcircled{A} \quad \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \left\{ \varepsilon = \frac{\varepsilon}{2|E|} \right\} = \varepsilon$$

Теорема 8 (Левый о пр-м. переходе)

Ф-ция на E : $|E| < \infty$ Опр. $\{f_n\}$ - сумм. ф-ции. Пусть для почти всех x $\{f_n\}$ - монотонно не уб. Пусть $\int_E f_n dx \leq M$, $\forall n$

тогда f н.в. $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ - сумм. ф-ция
и $\int_E f_n(x) dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_E f(x) dx$

Д-во: Если сверху ограничен + монот. $\Rightarrow$ сход. н.в.
 $\Rightarrow$ сход. по мере $\Rightarrow$ + лемма $\Rightarrow$ ок.

Остается суммируемость $f(x)$.

Рассмотрим сумму:

$$f_{n_k}(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f_N(x) \text{ почти всюду } \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_E f_{n_k} dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_E f_N dx \leq \left\{ \int_E f_{n_k} \leq f_n \right\} \leq M + \text{переход.}$$

Следствие (для пределов)

Если $u_n(x) \geq 0$ н.в. и суммируемы, тогда

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) \Rightarrow f(x), \text{ тогда } \int_E f(x) dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_E u_k(x) dx$$

Теорема 9 (Рату')

$\{f_n(x)\}$ - сумм. на мн-ве конечной меры E
ф-ции (умер, почти всюду конечно)
 $f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x)$ - ум., н.в. ограниченная

$$\int_E |f_n(x)| dx \leq A. \text{ Тогда } f(x) \text{ - суммируема}$$

$$\text{и } \int_E |f(x)| dx \leq A$$

Д-во: $g_n = \inf_{k \geq n} |f_k(x)|$ - монот. убыв.
 $g_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} |f(x)|$

Для g_n выполнены все условия теоремы Леви.

Теорема 10 (Лемма)

Если $f(x)$ сумм. на мн-ве конечной меры, то она измерима.

// + г.2 = Огран. на мн-ве конечной меры функции суммируемы $\Leftrightarrow$ она измерима.

Д-во: $\Rightarrow T_n = \{E_k^{(n)}\}_{k=1}^{m(n)}$ - разбиение.

Приведем T_{n+1} - измельчение T_n .

$$S_n = \sum_{k=1}^{m(n)} \mu_k^{(n)} |E_k^{(n)}|, \quad S_{n+1} = \sum_{k=1}^{m(n+1)} \mu_k^{(n+1)} |E_k^{(n+1)}|$$

Разбиения выбирать так, чтоб $S_n - S_{n+1} = 1/n$.

Может, в.к. $f(x)$ - интегрируема

$$S_n = \int_E \bar{f}_n dx, \quad S_{n+1} = \int_E \underline{f}_{n+1} dx, \quad \underline{f}_n \leq f(x) \leq \bar{f}_n$$

$$S_n - S_{n+1} = \int_E [\bar{f}_n - \underline{f}_{n+1}] dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \{ \text{с. лемма} \} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_E [\bar{f} - \underline{f}] dx = 0$$

$\Rightarrow \bar{f} = \underline{f} = f(x)$ н.в. на $E \Rightarrow f(x)$ суммируема, т.к. $\bar{f}$ и $\underline{f}$ суммируемы (?)

4. Умр. лемма об суммируемой функции на мн-ве бесконечной меры

$$|E| = +\infty, \quad |E_n| < +\infty, \quad E_n \subset E_{n+1}, \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = E.$$

Пусть $f(x)$ интегрируема на E_n , $\forall n \in \mathbb{N}$

$\{E_n\}$ - последовательность исчерпывающей измеримости.

Тогда независимо от выбора $\{E_n\}$

$$I = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{E_n} f(x) dx = \int_E f(x) dx \quad \text{интеграл по мере}$$

Пусть у нас есть прямоугольник $\Pi = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$

Теорема 11 (Фубини)

Пусть $f(x, y)$ - сумм. на Π .

$$I_1 = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx, \quad \forall \text{ н.в. } y \in [c, d]$$

$$I_2 = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy, \quad \forall \text{ н.в. } x \in [a, b]$$

Тогда, если $I_1(y)$ и $I_2(x)$ - сумм. ф-ции,

$$\int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx = \iint_{\Pi} f(x, y) dx dy$$

Замечание. Если $f \in L_1, L_2$, то не обязательно $\int f(x)g(x)dx$.

Пример. $\Pi = [-1, 1]^2$
 $f(x, y) = \begin{cases} xy/(x^2+y^2), & x^2+y^2 \neq 0 \\ 0, & x=y=0 \end{cases}$
 $\int f(x, y)dx = \int f(x, y)dy = 0$

Функции в полярных координатах и
 получим, что на Π $f(x, y)$ не суммируема
 $\int_{\Pi} f(x, y) dx dy \geq \int_0^{\pi} \dots = \infty \Rightarrow$

§5. Пространство L_p

Рассматриваем $p \geq 1, p \in \mathbb{R}$.
 E -числовое мн-во.

$L_p(E)$ - мн-во всех числовых на E функций, для которых $|f(x)|^p$ суммируема, т.е.

$$\int_E |f(x)|^p dx < \infty$$

Это мн-во является нормированным и

$$\|f\|_p = \|f\|_{p(E)} = \left(\int_E |f(x)|^p dx \right)^{1/p}$$

Аксиомы нормы $p \geq 1$

- $\|f\| = 0 \Leftrightarrow f = 0$
- $\|\alpha f\| = |\alpha| \cdot \|f\|$
- $\|f+g\| \leq \|f\| + \|g\|$

Неравенство Гёльдера:

Если $f(x) \in L_p(E), g(x) \in L_q(E)$, где $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$,
 то произведение f и g суммируемо и

$$\int_E |fg| dx \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q$$

Р-во: $\varphi(x) = x^\alpha - \alpha x, \alpha \in (0, 1), x \geq 0$
 $\varphi'(x) = \alpha(x^{\alpha-1} - 1), \varphi(x) \leq \varphi(1)$
 $x^\alpha - \alpha x \leq 1 - \alpha, x^\alpha \leq \alpha x + (1 - \alpha), x = a/b$

$$\frac{a^\alpha}{b^\alpha} \leq \alpha \frac{a}{b} + (1 - \alpha), a^\alpha b^{1-\alpha} \leq \alpha a + (1 - \alpha)b, a, b \geq 0$$

$$\alpha = \frac{1}{p} \Rightarrow 1 - \alpha = \frac{1}{q}$$

$$a^{1/p} b^{1/q} \leq a/p + b/q - \text{неравенство Йонга}$$

$$f, g \sim 0. \text{ Положим } a = |f|^p / \|f\|_p^p, b = |g|^q / \|g\|_q^q \Rightarrow$$

$$\frac{|f|}{\|f\|_p} \cdot \frac{|g|}{\|g\|_q} \leq \frac{|f|^p}{p \|f\|_p^p} + \frac{|g|^q}{q \|g\|_q^q} \Rightarrow$$

$$= \int_E \left(\dots \right) dx \leq \frac{1}{p} \int_E \dots + \frac{1}{q} \int_E \dots = 1$$

Неравенство Минковского (треугольника)

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p, f, g \in L_p, p \geq 1$$

$$|f+g|^p \leq 2^p (|f|^p + |g|^p) - ? \text{ (помогает)}$$

$p=1$ - очевидно???

$$p \geq 1. \int |f+g|^p dx = \int |f+g| \cdot |f+g|^{p-1} dx = \int_E \underbrace{|f+g|}_{L_p} \cdot \underbrace{|f+g|^{p-1}}_{L_q} dx$$

$$\|f+g\|_p^p \leq \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, 1 + \frac{p}{q} = p \Rightarrow \frac{p}{q} = p-1 \right)$$

$$f \in L_p, |f|^{p/q} \in L_q$$

$$\int |f| |f+g|^{p/q} dx + \int |g| |f+g|^{p/q} dx \leq \|f\|_p \left[\left(\int |f+g|^p dx \right)^{1/p} \right]^{p/q} +$$

$$+ \|g\|_p \left[\left(\int |f+g|^p dx \right)^{1/p} \right]^{p/q}$$

Опр. Последовательность наз-ся функциональной, если $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f_m\| = 0$, и сходящейся, если $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\| = 0$.

Опр. Линейное нормиров. пр-во называется полным (банаховым), если в нем вся сходящаяся

Теорема 1. $p \geq 1, |E| < \infty \Rightarrow L_p(E)$ - полное.

Д-во: рассмотрим функ. пом-го $\{f_n\}$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n(x) - f_m(x)\|_{L_p(E)} = 0 \Rightarrow$$

рассмотрим ностра: $f \in \eta_1 \subset \eta_2 \subset \dots \subset \eta_k \subset \eta_{k+1} \subset \dots$:

$$\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_{L_p(E)} \leq \frac{1}{2^k}$$

Очевидно (из пер-го теорема), что если $|E| < \infty$, то $f \in L_p \Rightarrow f \in L_1$ тогда.

$$\int_E |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}| \cdot 1 dx \leq \left\{ \begin{array}{l} \text{пр-во Гельдера} \end{array} \right\} \leq \|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_p \left(\int_E 1 dx \right)^{1/q} \leq \frac{1}{2^k} |E|^{1/q}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \int_E |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}| dx \leq |E|^{1/q}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} [f_{n_{k+1}} - f_{n_k}] \text{ с.ч. пот. вверху} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{сумма} = f \\ \text{на } E \end{array} \right.$$

$$f_{n_1} + \sum_{k=1}^{\infty} [f_{n_{k+1}} - f_{n_k}] = f_{n_N}(x) \xrightarrow[n \in E]{\text{н.в.}} f(x).$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \tilde{N} = \tilde{N}(\varepsilon) \forall n, m \geq \tilde{N}: \|f_m(x) - f_n(x)\|_p < \varepsilon$$

$$f_m - f_n \xrightarrow[n \in E]{\text{н.в.}} f_m - f(x)$$

$$|f_m(x) - f_n(x)|^p \xrightarrow[n \in E]{\text{н.в.}} |f_m(x) - f(x)|^p$$

Применяется теорема Леви и Фату.

Опр. Функция наз-ся простой, если она принимает не более, чем счётное, количество значений.

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1, & x \in E \\ 0, & x \notin E \end{cases} \quad \text{характеристическая функция множества}$$

E измеримо $\Leftrightarrow \chi_E$ измерима

Лемма 1. Пусть E - измеримо, $f(x) \geq 0$ и измерима на E , тогда $\exists$ убывающ. послед-сть простых измерим. ф-ций, которая с.ч. к $f(x)$, и на мн-ве конечных значений сходящаяся равномерно.

Д-во: $k=0, 1, 2, \dots, n=1, 2, \dots$

$$\text{Введём } E_k^n = E \left[\frac{k}{2^n} \leq f(x) < \frac{k+1}{2^n} \right], \quad E_{\infty} = E[f = +\infty]$$

$$E = E_{\infty} \cup \left(\bigcup_{k=0}^{\infty} E_k^n \right)$$

$$E_k^n = E_{2k}^{n+1} \cup E_{2k+1}^{n+1}, \quad f_n(x) = \frac{k}{2^n}, \quad x \in E_k^n$$

$$\left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n} \right) = \left[\frac{2k}{2^{n+1}}, \frac{2k+1}{2^{n+1}} \right) \cup \left[\frac{2k+1}{2^{n+1}}, \frac{2k+2}{2^{n+1}} \right)$$

$$\tilde{f}_n(x) = \begin{cases} f_n, & f_n \leq n \\ n, & f_n > n \end{cases} \quad \text{искомая последовательность}$$

$$\text{или } f(x) \in L_p(E), \quad |E| < \infty, \text{ то } \exists \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \chi_{E_n}(x) \\ \|f(x) - \varphi(x)\|_{L_p(E)} < \varepsilon$$

И процесс можно продолжать бесконечно.

Из леммы: для как бы приблизим $f(x)$:

$$\|f(x) - \varphi(x)\|_{L_p(E)}; \quad \varphi(x) - \text{простая}$$

$$\text{Всё (?) } \in L_p(E) \Rightarrow \varphi \in L_p(E), \quad \int_E |\varphi|^p dx = \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^p$$

$$\text{Рез } \text{с.ч.} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^p \rightarrow 0.$$

$$\|f - \varphi\|_p \leq \|f - \varphi - \sum_{k=n}^{\infty} c_k \chi_{E_k}\|_p \leq \|f - \varphi\| + \left\| \sum_{k=n}^{\infty} c_k \chi_{E_k} \right\| \rightarrow 0.$$

Теорема 2. $|E| < \infty, C(E)$ - мн-во всех непрерыв. на E ф-ций вверху плотно в $L_p(E)$, то есть $\forall f \in L_p(E) \forall \varepsilon > 0 \exists g(x) \in C(E): \|f - g\|_{L_p(E)} < \varepsilon$.

Д.во: Достаточно г-го только для характеризации
 непрерывности, т.к. $\forall f(x)$ можно
 придумать (найдем некую ε):

$$\| \chi_E(x) - g(x) \|_{L_1(E)} = \varepsilon, \quad \forall \varepsilon \exists F, G: F \subset E \subset G: |G \setminus F| < \varepsilon$$

здесь ε — задан

Введем: $g(x) = \frac{p(x, CG)}{p(x, CG) + p(x, F)}$

Ф-ция рассчитанная по заданной мере непрерывна

$$g(x) = \begin{cases} 0, & x \in CG \\ 1, & x \in F \end{cases}$$

Рассмотрим $|\chi_E(x) - g(x)| \leq 1$, $\Rightarrow$ на CG и F :

$$\int_E |\chi_E - g| dx = \int_{G \setminus F} 1 dx \leq |G \setminus F| < \varepsilon$$

Замечание: 1. $g(x) \in C(\mathbb{R}^n)$
 2. Мн-во $C^\infty(E)$ вблизи E много

Лемма 3 (о непр. в метрике L_p)

Пусть E — др. метр. п-во. Тогда $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$
 $\forall h = (h_1, \dots, h_n): |h_i| < \delta \implies \|f(x+h) - f(x)\|_{L_p(E)} < \varepsilon$

Д.во: $E \subset \bar{B}$ — замкнутый шар с центром в 0
 $\bar{B} = \{x: |x| \leq r\}$, $E_0 = \bar{B}(r+1)$ — тоже шар

$|h| < 1 \Rightarrow (x \in E \Rightarrow x+h \in E_0)$

До т.д. $\forall f \in L_p(E_0) \exists g(x) \in C(E_0): \|f - g\|_{L_p(E_0)} < \varepsilon$

$$\|f(x+h) - f(x)\|_{L_p(E)} = \|f(x+h) - g(x+h) + g(x+h) - g(x) + g(x) - f(x)\|_{L_p(E)}$$

$$\leq \|f(x+h) - g(x+h)\|_{L_p(E)} + \|g(x+h) - g(x)\|_{L_p(E)} + \|g(x) - f(x)\|_{L_p(E)}$$

$$\leq 2\|g(x) - f(x)\|_{L_p(E_0)} < 2\varepsilon$$

$\Rightarrow \forall \varepsilon < 3\varepsilon = \varepsilon, \quad \varepsilon = \varepsilon/3$

§6 Метрические и нормированные пространства

Опр. Пр-во метрическое, если $\forall$ пара элементов
 составлена метрика с аксиомами:

1. $p(x, y) = p(y, x)$ — симметричность
2. $p(x, y) \leq p(x, z) + p(z, y)$ — треугольник
3. $p(x, y) \geq 0, \quad \Rightarrow 0 \iff x=y$ — тождество

Замечание: 1. метрика = расстояние
 2. $\forall$ пр-во может быть метрическим, если $p(x, y) = \begin{cases} 1, & x \neq y \\ 0, & x = y \end{cases}$

Пример: в $L_p: p(f, g) = \|f - g\|$

Опр. $\{x_n\}$ — сходящаяся к x (вс. по пр-ву), если
 $p(x_n, x) \rightarrow 0$
 — фундаментальная, если $p(x_n, x_m) \xrightarrow{n, m \rightarrow \infty} 0$

Опр. Пр-во полное, если в нем $\forall$ фундамент. послед-ва
 сходится.

Пример: $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ — не полное, т.к. $\frac{1}{n} \rightarrow 0 \notin \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

Свойства сходящихся послед-ств

1. $\forall$ послед-ва имеет сходящуюся к тому же.
2. Единственность предела
 $p(x, y) \leq p(x, x_n) + p(y, x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow x=y$
3. Ограниченность, т.е. $\forall a, p(x_n, a) \leq M_a$

Опр. $B(a, r) = \{x: p(x, a) < r\}$ — открытый шар
 $\bar{B}(a, r) = \{x: p(x, a) \leq r\}$ — замкнутый шар
 $S(a, r) = \{x: p(x, a) = r\}$ — сфера

Опр. Мн-во A ограничено, если $\exists B(a, r): A \subset B$

Опр. М-метр. пр-во, X — некоторое: $X \subset M$. Точка a — предельная
 точка X , если $\forall$ шар с центром в $a \exists$ все $x: x \in X, x \neq a$, т.е.

Уг. $B(a, r) \cap [X \setminus \{a\}] \neq \emptyset$.

Опр. X замкнутой, если оно содержит все свои предельные точки.
 X открытой, если X - замкнутой.

Опр. X - дополнение = $M \setminus X$.

Опр. X - всюду плотное, если $\overline{X} = M$, т.е. замыкание совпадает со всем пространством.

Опр. X - нигде не плотное в M , если $\forall$ шар U из M содержится в себе шар, disjoint от точек из X .

Опр. Пр-во $\ell_p, p \geq 1$ - пр-во нормированности-последней $X = (\xi_1, \dots, \xi_n, \dots) : \sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^p < \infty$.

Можно определить норму $\|X\|_p = \|X\|_p = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^p \right)^{1/p}$.

Норма Гёльдера доказывается аналогично.

Оно полное. Почему?

Пусть $X^n = (\xi_1^n, \dots, \xi_k^n, \dots)$, $X^m = (\xi_1^m, \dots, \xi_k^m, \dots)$ (формулы)
 $\Rightarrow \|X^n - X^m\|_p = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i^n - \xi_i^m|^p \right)^{1/p} < \varepsilon \Rightarrow$
 $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \forall n, m \geq N$
 $\Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i^n - \xi_i^m|^p < \varepsilon^p \Rightarrow |\xi_k^n - \xi_k^m| < \varepsilon \Rightarrow$ (формулы)
 $\Rightarrow \xi_k^n \rightarrow \xi_k, \forall k$.

$\sum_{i=1}^L |\xi_i^n - \xi_i^m|^p < \varepsilon^p \Rightarrow \{m \rightarrow \infty\} \Rightarrow \sum_{i=1}^L |\xi_i^n - \xi_i|^p < \varepsilon^p \Rightarrow$

$\Rightarrow \{L \rightarrow \infty\} \Rightarrow \|X_n - X\|_p = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i^n - \xi_i|^p \right)^{1/p} < \varepsilon$

В силу какого-то первого тригонометрического (?)

$X = (\xi_1, \dots, \xi_n, \dots) \in \text{нн-ву} \Rightarrow$ показали полноту

Теорема 3. (принцип сжимающих отображений)

до. $x_0 \in M$, $x_{n+1} = Ax_n$

$$p(x_2, x_1) = p(Ax_1, Ax_0) \leq \alpha p(x_1, x_0)$$

$$p(x_3, x_2) = p(Ax_2, Ax_1) \leq \alpha^2 p(x_2, x_1)$$

...

$$p(x_{n+1}, x_n) \leq \alpha^n p(x_1, x_0)$$

$$p(x_n, x_{n+p}) \leq \{ \text{через } p \text{ точек} \} \leq p(x_n, x_{n+1}) + \dots + p(x_{n+p-1}, x_{n+p})$$

$$\leq \alpha^n p(x_1, x_0) + \dots + \alpha^{n+p-1} p(x_1, x_0) =$$

$$= \alpha^n \frac{1 - \alpha^p}{1 - \alpha} p(x_1, x_0) \leq \frac{\alpha^n}{1 - \alpha} p(x_1, x_0)$$

$x_n \rightarrow x \in M$

$$p(x, Ax) \leq p(x, x_n) + p(x_n, Ax) = p(x, x_n) + p(Ax_{n-1}, Ax)$$

$$\leq p(x, x_n) + \alpha p(x_{n-1}, x) \Rightarrow p(x, Ax) = 0 \Rightarrow x = Ax$$

$$p(x(t), y(t)) = \max_{t \in [a, b]} |x(t) - y(t)| - \text{равномерная метрика}$$

$$|x(t) - y(t)| = \left| \lambda \int_a^b k(t, s) x(s) ds - \lambda \int_a^b k(t, s) y(s) ds \right|$$

$$\leq |\lambda| \int_a^b |k(t, s) (x(s) - y(s))| ds \leq |\lambda| \int_a^b M |x(s) - y(s)| ds$$

$$\leq |\lambda| M \cdot \max_{s \in [a, b]} |x(s) - y(s)| \cdot (b-a) = |\lambda| M (b-a) p(x, y) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p(Ax, Ay) \leq |\lambda| M (b-a) p(x, y), \quad Ax(s) = \lambda \int_a^b k(s, t) x(t) dt + f(s)$$

$$|\lambda| \leq \frac{1}{(b-a)M}$$

$$k(t, s) \in L_2(K), \quad K = (a, b) \times (a, b)$$

$$Ax(t) = \int_a^b k(t, s) x(s) ds$$

$$(A_0 x(t))^2 \leq \int_0^t k^2(t,s) ds \int_0^t x^2(s) ds$$

§7. Линейные операторы

Пусть $A: X \rightarrow Y$, где X, Y — линейные нормированные пространства (ЛНП)

Опр. Оператор A — линейный, если

- 1) $A(\alpha x) = \alpha Ax$ (однородность)
- 2) $A(x_1 + x_2) = Ax_1 + Ax_2$ (аддитивность)

Опр. Оператор A непрерывен в т. x , если $\forall \{x_n\}: x_n \rightarrow x \quad (\|x_n - x\| \rightarrow 0) \quad Ax_n \rightarrow Ax \quad (\|Ax_n - Ax\| \rightarrow 0)$

Теорема 1 Лин. оператор непр. на всем пространстве $\Leftrightarrow$ он непр. хотя бы в 0 или $\leq$ норм.

Д-во: $\Rightarrow$ — очевидно

$\Leftarrow$ Пусть A непр. в т. x_0 , т.е. $\forall x_n \rightarrow x_0 \quad Ax_n \rightarrow Ax_0$
 $\forall x \quad x_n = x_0 + x \rightarrow x_0$
 $A(x_n - x_0 + x) = Ax_n - Ax_0 + Ax \rightarrow Ax$

Опр. A ограничен, если $\exists M: \forall x \in X \quad \|Ax\|_Y \leq M \|x\|_X$

Теорема 2 Лин. опер. A непрерывен $\Leftrightarrow$ он ограничен

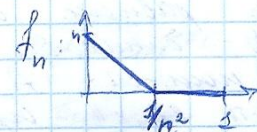
Д-во: $\Rightarrow$ Пусть нет, тогда $\exists \{x_n\}: \|Ax_n\| > n \|x_n\|$
 Возьмем $\xi_n = \frac{x_n}{n \|x_n\|}, \quad \|\xi_n\| \rightarrow 0$

$$A \xi_n = \frac{Ax_n}{n \|x_n\|}, \quad \|A \xi_n\| = \frac{\|Ax_n\|}{n \|x_n\|} > 1 \Rightarrow (?)$$

$$\|Ax_n - Ax\| \leq M \|x_n - x\| \Rightarrow \text{оценимо}$$

Пример. 1) $C[0,1] \quad A f(x) = f(0) \quad (\|f\| = \max_{x \in [0,1]} |f(x)|)$

$$\|f\| = \int_0^1 |f(x)| dx$$



разрешено в нуле

Опр. Норма оператора A — наименьшая из констант M в ограничении.
 $\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$

Мн-во всех лин. $A: X \rightarrow Y$ — все линейные пространства — $L(X \rightarrow Y)$

- 1) $\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0$
- 2) $(A+B)x = Ax + Bx \Rightarrow$ пер-во тр-ков
- 3) $(\alpha A)x = \alpha \cdot Ax \Rightarrow \|\alpha A\| = |\alpha| \cdot \|A\|$

Линейные функционалы

Функционал — лин. непр. $f: X \rightarrow \mathbb{R}^1 (C)$.

Ср-во всех f — сопряженное пр-во — X^*

Теорема 3 Y — полное $\Rightarrow L(X \rightarrow Y)$ — полное

Д-во: Рассмотрим посыл-то операторов A_n :
 $\|A_m - A_n\| \xrightarrow{m,n \rightarrow \infty} 0$

$\forall x \in X \quad \{A_n x\}$ — сильно функ., т.е. $\|A_m x - A_n x\| \leq \|A_m - A_n\| \|x\|$
 Y — полное $\Rightarrow \exists y = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n x = Ax$

- 1) A — огранич. — ?
- 2) A — предел A_n — ?
- 3) A_n — функ. $\Rightarrow \{Ax_n\}$ — сильно функ. $\Rightarrow \{A_n\}$ — функ. $\Rightarrow \|A_n\|$ — огранич.
 $\forall x: \|x\| \leq 1 \quad \|A_n x\| \leq \|A_n\| \|x\| \leq M$
 $A_n x \rightarrow Ax \Rightarrow \|A_n x\| \rightarrow \|Ax\| \Rightarrow \|Ax\| \leq M$
 $\|A\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\| \leq M \Rightarrow$ оператор ограничен

4) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = N(\varepsilon): \forall n \geq N \quad \forall x \in X \quad \|A_{n+p} - A_n\| < \varepsilon$
 $\forall x: \|x\| \leq 1 \quad \|A_{n+p} x - A_n x\| \leq \|A_{n+p} - A_n\| \|x\| < \varepsilon$

$$\rho \rightarrow \sigma \Rightarrow \|Ax - A_n x\| \leq \varepsilon, \|A_n - A\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|A_n x - Ax\| \leq \varepsilon$$

Теорема 4. (Банаха-Уреймауза)

(принцип равномер. ограниченности)
 Пусть X, Y - банаховы (норм. или метр. пространства),
 определена лине. оп. $A_n \in L(X \rightarrow Y)$:
 $\forall x \in X$ лине. оп. $\|A_n x\|$ - ограничена, т.е.
 $\exists C = \text{const} : \|A_n\| \leq C$

Д-во: Пусть канторов $\text{но } J \Rightarrow \{A_n x\}$ - как
 функции переменных (n, x) - ограничена на
 $\forall$ шаре пространства X Пусть u - это
 не так, т.е. J шар $\bar{B}(\tilde{x}, \tilde{\varepsilon})$ на котором
 лине. оп. $A_n x$ ограничена.

Возьмем $\forall \xi \neq 0$, рассмотрим $x = \frac{\xi}{\|\xi\|} + \tilde{x} \in \bar{B}$
 $A_n x = \tilde{\varepsilon} \frac{A_n \xi}{\|\xi\|} + A_n \tilde{x}, \|A_n \xi\| \leq \frac{\|\xi\|}{\tilde{\varepsilon}} [\|A_n x\| + \|A_n \tilde{x}\|] \leq$
 $\leq \frac{\|\xi\|}{\tilde{\varepsilon}} \cdot 2M \Rightarrow \|A_n\| \leq C \Rightarrow (?) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ доказано то, что $A_n x$ метр. на $\forall$ шаре.
 Возьмем некот. шар, где $\exists x: \|A_n x\| > 1$. Возьмем
 внутри замкн. шар - окр. этой точки.

$\bar{B}_1(x_1, \varepsilon_1), \varepsilon_1 < 1, \|A_n x_1\| > 1 \quad \forall x \in \bar{B}_1$
 Аналогично, $\bar{B}_2(x_2, \varepsilon_2), \varepsilon_2 < 1/2, \|A_n x_2\| > 2 \quad \forall x \in \bar{B}_2, n_2 > n_1$

$\bar{B}_m(x_m, \varepsilon_m), \varepsilon_m < 1/m, \|A_n x_m\| > m \quad \forall x \in \bar{B}_m, n_m > n_{m-1}$
 Сложившись лине. лине. оп. A_n в шаров $\bar{B}$ лине. оп.
 определена $\Rightarrow$ у них J общая точка $\bar{x}$:
 $\|A_n \bar{x}\| > n \Rightarrow \bar{x}$ - это точка сепарат. шар $\Rightarrow (?)$

Следствие: Пусть X, Y - банаховы, $A_n \in L(X \rightarrow Y)$

$\exists x_n: \|x_n\| \leq 1, \lim_{n \rightarrow \infty} \|A_n x_n\| = +\infty$. Тогда

$\exists x_0: \|x_0\| \leq 1, \lim_{n \rightarrow \infty} \|A_n x_0\| = +\infty$.

Д-во: Пусть не так, т.е. $\forall x_0: \|x_0\| \leq 1, \|A_n x_0\| \leq \text{огр.}$

$\forall \xi \neq 0, x = \xi/\|\xi\|, \|x\| = 1 \leq 1$

$\frac{\|A_n \xi\|}{\|\xi\|} = \|A_n x\|$ - огр. $\Rightarrow \exists C: \|A_n\| \leq C \Rightarrow (?)$
 $\Downarrow$
 $\|A_n x_0\| \leq \|A_n\| \|x_0\| \leq C$

Регуляр

$f(x): f(x) \in C[-\pi, \pi], f(-\pi) = f(\pi)$

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$ - регул.

$$S_n(t, x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt dt, \quad k=0, 1, \dots$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt dt, \quad k=0, 1, \dots$$

$$S_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt + \sum_{k=1}^n \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\cos k(t-x) + \sin k(t-x)) f(t) dt$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [1 + \sum_{k=1}^n 2 \cos k(t-x)] f(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin((n+1/2)(t-x))}{\sin(t-x)/2} f(t) dt$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin((n+1/2)(t-x))}{2 \sin(t-x)/2} f(t) dt$$

$$\frac{\sin((n+1/2)t)}{\sin t/2} = \frac{\sin nt}{2 \sin t/2} + \frac{\cos nt}{2}, \quad g(t) = \begin{cases} 1/2 \operatorname{tg} t/2 - 1/2 \\ 0, \end{cases}$$

$$S_n(t, 0) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin nt}{t} f(t) dt + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin nt g(t) f(t) dt + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nt \frac{f(t)}{2} dt$$

Определение: $A_n f = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin nt}{t} f(t) dt$ (линей. опер.)

Пример (k действит.)
 $f_n(t) = \operatorname{sgn} t \sin nt, \quad \|f_n\| = 1$

$$A_n f_n = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^2 nt}{|t|} dt \rightarrow \infty \quad n \rightarrow \infty$$

§8. Обратный оператор

$$Ax = y.$$

B - правый обратный оператор:

$$AB = E, \quad x = By \Rightarrow A(By) = y$$

$\rightarrow$ решение ур-ния, н.б. не един.

C - левый обратный оператор:

$$CA = E, \quad Ax = y \Rightarrow CAx = Cy \Rightarrow \bar{x} = Cy - \text{решение единственно, но может не существовать.}$$

Опр. $B = C \Rightarrow \exists$ обратный оператор.

$$x = A^{-1}(\alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha A^{-1}(y_1) + \beta A^{-1}(y_2) \quad \left[\begin{array}{l} A^{-1} \\ Ax=0 \Rightarrow x=0 \end{array} \right] \text{ линейн.}$$

Теорема 1. $A: X \rightarrow Y, \forall x \in X \|Ax\|_Y \geq m \|x\|_X, m > 0 \Rightarrow A^{-1}$ ограничен.

Д-во: $y_1 = y_2$

$$Ax_1 = Ax_2 \Rightarrow x_1 = x_2, \|A^{-1}y\|_X \leq \frac{1}{m} \|y\|_Y$$

Теорема 2 (Неймана)

X - банахово, $A: X \rightarrow X$ (лин. оп):
 $\|A\| \leq q < 1$. Тогда $(E - A)^{-1}$ ограничен и
 $\|(E - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - q}$

Д-во: Разлн. $(E - A)(E + A + \dots + A^{n-1}) = E - A^n$
 $A^k = A(A^{k-1}), \|A^k\| \leq (\|A\|)^k \leq q^k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$
 по теореме 3 (!) $\|A_n\| \rightarrow 0 \Rightarrow A_n \rightarrow 0 \Rightarrow$
 $\Rightarrow E - A^n \rightarrow E$

$$\Rightarrow \|(E - A)^{-1}\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|A\|^n = \frac{1}{1 - \|A\|} \leq \frac{1}{1 - q}$$

Теорема 3. Пусть X - банахово, A - линейн. опер $X \rightarrow X$, линейн. опер. обратный.

ΔA - опер: $X \rightarrow X$ и $\|\Delta A\| < 1/\|A^{-1}\|$.

Тогда для $B = A + \Delta A \quad \exists B^{-1}$ и
 опер.

$$\|B^{-1} - A^{-1}\| \leq \frac{\|A^{-1}\|}{1 - \|A\|\|A^{-1}\|}$$

Д-во: 1) погран?

$$B = A(E + A^{-1}\Delta A), \|A^{-1}\Delta A\| \leq \|A^{-1}\|\|\Delta A\| < 1 \Rightarrow$$

$\rightarrow$ по г.2 он имеет обр. обратный.

$$B^{-1} = (E + A^{-1}\Delta A)^{-1}A^{-1} \Rightarrow \text{огран. (и } \exists)$$

$$\|B^{-1} - A^{-1}\| = \|(E + A^{-1}\Delta A)^{-1} - E\|A^{-1} =$$

$$= \left\| \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} (A^{-1}\Delta A)^n \right\| A^{-1} \leq \frac{\|A^{-1}\Delta A\| \cdot \|A^{-1}\|}{1 - \|A^{-1}\|\|\Delta A\|}$$

Теорема 4 (Банаха об обратном операторе)

Пусть X, Y - банаховы, $A \in L(X \rightarrow Y)$ - линейн. оператор, соответ. между X и Y , где обратный оператор ограничен.

Д-во: Y - линейн. $Y_0 = \{y \in Y \mid \|A^{-1}y\| \leq m\|y\|\}$

$$y_1 \leq y_2 \leq \dots, y = \bigcup_{i=1}^{\infty} y_i$$

Y - линейн. $\Rightarrow$ линейн. для каждого y .

y_0 не является ни не плотн., $\square$ г.е.

~~ни не~~ $\rightarrow \exists$ шар y которого в шар входит или содержит точку y_0 (?)

$$B(\tilde{y}, \tilde{r}) \cap Y_0 = B(\tilde{y}, \tilde{r})$$

$$y \in Y_0 \Rightarrow B(y, r) \subset B(\tilde{y}, \tilde{r})$$

$$y: \|y\| = r, y + y \in B(\tilde{y}, \tilde{r})$$

$$\exists z^{(k)} \in Y_0: z^{(k)} \rightarrow y + y, \frac{r}{2} \leq \|y^{(k)}\| \leq r$$

$$\|A^{-1}y^{(k)}\| = \|A^{-1}z^{(k)} - A^{-1}y\| \leq \|A^{-1}z^{(k)}\| + \|A^{-1}y\| \leq$$

$$m_0[\|z^{(k)}\| + \|y\|] \leq m_0[\|y^{(k)}\| + 2\|y\|] \leq \frac{2m_0}{r_1}[r + 2\|y\|] \cdot \frac{r}{2} \leq$$

$$\leq \frac{2m_0}{r_1}[r + 2\|y\|] \cdot \|y^{(k)}\|$$

$$\tilde{y} = y/\|y\| \cdot r_1 \Rightarrow \|\tilde{y}\| = r_1$$

$$\tilde{y}^{(k)} \rightarrow \tilde{y}, y^{(k)} \in Y_0, y^{(k)} = \tilde{y}^{(k)} \cdot \|y^{(k)}\| \rightarrow y$$

$$\|A^{-1}y^{(k)}\| = \frac{\|y\|}{r_1} \|A^{-1}\tilde{y}^{(k)}\|$$

$$\forall y \in Y: \|y\| = 1, \exists y_1 \in Y: \|y - y_1\| \leq \frac{1}{2}, \|y_1\| \leq 1, \\ \exists y_2 \in Y: \|y - (y_1 + y_2)\| \leq \frac{1}{2^2}, \|y_2\| \leq \frac{1}{2}$$

$$\exists y_n \in Y: \|y - (y_1 + \dots + y_n)\| \leq \frac{1}{2^n}, \|y_n\| \leq \frac{1}{2^{n-1}}$$

$$x_n = A^{-1}y_n, S_n = x_1 + \dots + x_n, \text{ т.к. } \sup_{k=1, \dots, n} \|A^{-1}y_k\| \leq \frac{N}{2^{k-1}} \\ S_{n+p} - S_n = x_{n+1} + \dots + x_{n+p} = \sum_{k=n+1}^{n+p} A^{-1}y_k \\ \|S_{n+p} - S_n\| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} \|A^{-1}y_k\| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{N}{2^{k-1}} \leq \frac{N}{2^{n-1}}$$

$$\Rightarrow S_n \rightarrow x \in X, y = Ax, y_1 + \dots + y_n \rightarrow y$$

$$\|A^{-1}y\| = \|x\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_1 + \dots + x_n\| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \|x_k\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \|A^{-1}y_k\| \\ \leq \lim_{n \rightarrow \infty} N \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} = \lim_{n \rightarrow \infty} N \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 2N = 2N\|y\|, y \in Y$$

§9. Линейные функционалы

Теорема 1 (Хан-Банаха о продолжении линейного функционала). Пусть Y — век. X и $L \subset X$, L — линейное линейное подпространство (линейное с +, т.е. $x_1, x_2 \in L \Rightarrow x_1 + x_2 \in L$).

f — линейный функционал на L с нормой $\|f\|_L$. Тогда f — линейный функционал на L с нормой $\|f\|_X$. Тогда $\|f\|_X = \|f\|_L$.

Доказательство. Рассмотрим расширение на 1 переменную. Возьмем $x_0 \in X \setminus L$, $L_1 = L + x_0$, $u = x + tx_0$, $x \in L$. $x_1 + tx_0 = x_2 + tx_0 = x_3 + tx_0 \Rightarrow x_1 = x_2 = x_3$.

$$f(x_2) - f(x_1) = f(x_2 - x_1) \leq \|f\| \|x_2 - x_1\| \leq \|f\| (\|x_1 - x_0\| + \|x_2 - x_0\|)$$

$$f(x_2) - \|f\| \|x_2 + x_0\| \leq f_1 - \|f\| \|x_1 + x_0\|$$

$$\sup_{x \in L} \{f(x) - \|f\| \|x + x_0\|\} \leq c \leq \inf_{x \in L} \{f(x) + \|f\| \|x + x_0\|\}$$

$$|f(x) - c| \leq \|f\| \|x + x_0\|$$

на L_1 : $u = x + tx_0 \in L_1$. Введем $\varphi(u) = f(x) - tc$

$$|f(x) - tc| = |f(x) - c| \leq \|f\| \|x + x_0\| = \|f\| \|x + tx_0\| = \|f\| \|u\| \Rightarrow \|f\| = \|f\|$$

Сепарабельное пространство — в нем существует счетное базисное множество, причем пространство метризуемо.

Рассмотрим семейство сепараб. пр-во.

$$x_1, x_2, \dots, x_n, \dots \quad L_2 = L_2(x_1, x_2)$$

$$L_3 = L_3(x_1, x_2, x_3)$$

$$L_k = L_k(x_1, x_2, \dots, x_k)$$

$$x_k \in L_k \quad z_k \rightarrow x$$

$$f(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(z_k)$$

$$|f(x)| \leq \|f\| \|x\| \Rightarrow \|f\|_X \leq \|f\|_L = \|f\|$$

Лемма 1. X — метризуемо, норма $\|x\|$, $x_0 \in X$, $x \neq 0$.

$f(x) = t \|x\|$ — линейный функционал, $\|f\| = 1$, $f(x_0) = \|x_0\|$.

$x = tx_0$, $f(x) = t \|x_0\|$, $|f(x)| = |t| \|x_0\| = \|x\|$.

Лемма 2. X — метризуемо, $x_1 + x_2 \Rightarrow f(x_1) + f(x_2)$, $\|f\| = 1$ (т.е. f — линейный функционал, который не разлагается).

Доказательство. Пусть $\{x_n\} \subset X$, $x_n \rightarrow x$ слабо, если f — линейный функционал, $f(x_n) \rightarrow f(x)$.

$$|f(x_1) - f(x)| \leq |f(x_1 - x)| \leq \|f\| \|x_1 - x\|$$

Следствие:

единственность предела (из леммы 2) и ограниченность.

Теорема 2. Пусть X — банахово, $\{x_n\}$: $\forall f \in F$ $\{f(x_n)\}$ ограничена $\Rightarrow \{x_n\}$ ограничена ($\|x_n\|$).

Теорема 3. $\{x_n\}$ — слабо сходящаяся, $\{x_n\}$ сильно сходящая $\Leftrightarrow f(x_n) \rightarrow f(x)$ равномерно на $\|f\| \leq 1$.

Р. 10. $\Rightarrow |f(x_n) - f(x)| \leq \|f\| \|x_n - x\| \leq \|x_n - x\| \quad \forall \|x_n - x\| \leq 1$

$\Rightarrow f_n(x_n) - f_n(x) = f_n(x_n - x) = \|x_n - x\|, \quad \|f_n\| = 1$
(по теореме Хана-Банаха такой f_n $\exists$)
 $\|x_n - x\| = f_n(x_n) - f_n(x) \leq |f_n(x_n) - f_n(x)| \leq \sup_{\|x\| \leq 1} |f(x_n) - f(x)|$

Представление линейного функционала

Пусть E — банахово пр-во $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$
конечного

$x = \xi_1 e_1 + \dots + \xi_n e_n$

$f(x) = \xi_1 f(e_1) + \dots + \xi_n f(e_n) = \xi_1 c_1 + \dots + \xi_n c_n$

$f \sim (c_1, \dots, c_n) \Rightarrow$ линейная форма $\sim$ слабая форма

$e_p: x = (\xi_1, \dots, \xi_k, \dots) \quad \|x\| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p \right)^{1/p}$
 $e_k = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$
 $x = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k e_k, \quad f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k f(e_k)$

$c = (c_1, \dots, c_n, \dots) \quad x_n = (\xi_1^{(n)}, \dots, \xi_k^{(n)}, \dots)$
векторная норма $p, q, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \quad (p(q-1) = q)$

$\xi_k^{(n)} = \begin{cases} \text{sign } c_k \cdot |c_k|^{q-1}, & k \leq n \\ 0, & k > n \end{cases}$

$f(x_n) = \sum_{k=1}^n |c_k|^q \leq \|f\| \cdot \|x_n\|_p = \|f\| \left(\sum_{k=1}^n |c_k|^p \right)^{1/p}$

$\left(\sum_{k=1}^n |c_k|^q \right)^{1/q} \leq \|f\| \Rightarrow n \rightarrow \infty$ (это нужно пер-во Гейльдера)
 $\|c\|_q \leq \|f\|$

$|f(x)| \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^p \right)^{1/p} \|c\|_q \Rightarrow \|f\| \leq \|c\|_q$
 $\|x\|_p$

Пусть E — банахово пр-во
Рассмотрим $L_p(E), \quad p \geq 1. \quad \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \right)$

В L_p $\forall$ функционал можно представить в виде
 $f(x(t)) = \int_E x(t) y(t) dt, \quad \text{где } y(t) \in L_q(E) \text{ — определенная однозначно}$

Также можно в виде интеграла
 $f(x(t)) = \int_a^b x(t) d\mu(t)$

§10. Гильбертово пространство

Опр. линейное пр-во над $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, если на нем введено скалярное произведение, называется гильбертовым

Аксиомы ск. пр-ва:

- $(x, y) = \overline{(y, x)}$
- $(\lambda x, y) = \lambda (x, y)$
- $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$
- $(x, x) \geq 0, \quad = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Норма задается как $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$
Принимать свойства нормы

Мы рассматриваем бесконечномерное пр-во

Пер-во Коши-Буняковского:

$0 \leq (\lambda x - y, \lambda x - y) = |\lambda|^2 (x, x) - 2\lambda (x, y) + (y, y)$

Положим $\lambda = \frac{(y, x)}{(x, x)}$, получим, что

$0 \leq \frac{(y, x)^2}{(x, x)} - \frac{(y, y)(x, x)}{(x, x)(x, x)} + (y, y) \Rightarrow$
 $\Rightarrow \frac{|(x, y)|^2}{(x, x)} \leq (y, y)$

Рав-во парности

$\|x - y\|^2 = \|(x - y)\|^2 = \|x\|^2 - (x, y) - (y, x) + \|y\|^2$
 $\|x + y\|^2 = \|(x + y)\|^2 = \|x\|^2 + (x, y) + (y, x) + \|y\|^2$
 $\Rightarrow \|x - y\|^2 + \|x + y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$

Опр. M — M — замкнутое, если
 $\forall x \in M \Rightarrow \alpha x + (1 - \alpha)y \in M \quad \forall \alpha \in (0, 1)$

Лемма 1. Если мин-во W замкнуто и замкнуто в метрическом пр-ве H , то $\exists!$ элемент $x \in W: \inf_{u \in W} \|u\| = d = \|x\|$

Р-во: $\exists \{x_n\}: x_n \in W: \|x_n\| \rightarrow d$

$$\frac{x_n + x_m}{2} \in W \Rightarrow \left\| \frac{x_n + x_m}{2} \right\| \geq d \Rightarrow \|x_n + x_m\|^2 \geq 4d^2$$

$$0 \leq \|x_n - x_m\|^2 = 2\|x_n\|^2 + 2\|x_m\|^2 - \|x_n + x_m\|^2 \xrightarrow{n,m \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow \Rightarrow 4d^2$$

$\Rightarrow \{x_n\}$ - фундаментальна $\Rightarrow x_n \rightarrow x, \|x_n - x\| \rightarrow 0 \Rightarrow \|x_n\| \rightarrow \|x\| = d$

Применим, что элемент такой z :

$$0 \leq \|x_1 - x_2\|^2 = 2\|x_1\|^2 + 2\|x_2\|^2 - \|x_1 + x_2\|^2 = 0$$

Теорема 1 (Леву)

Пусть L - мин-во в линей. пр-ве H , т.е. замкн. линейное многообр., т.е. $x, y \in L \Rightarrow \alpha x + \beta y \in L$. Тогда $\forall x \in H \exists! y, z: y \in L, z \perp L, x = y + z$, причем $\|x - y\| = \inf_{u \in L} \|x - u\|$, т.е. y ближе всего к x принадлежит L .

Р-во: Рассмотрим $W = \{x - u, u \in L\}$. По лемме 1 $\exists z = x - y \in W \Rightarrow y \in L$. Попробуем $z \perp L$?

Рассмотрим $\forall v \neq 0, v \in L: z$ -min элемент $\Rightarrow \|z\|^2 \leq \|z - \alpha v\|^2, z - \alpha v = z - \alpha v \Rightarrow \|z\|^2 - 2\alpha(z, v) + \alpha^2\|v\|^2 \geq \|z\|^2$

$$\text{Выберем } \alpha = \frac{(z, v)}{\|v\|^2} \Rightarrow -\frac{2(z, v)^2}{\|v\|^4} \geq 0 \Rightarrow (z, v) = 0 \Rightarrow z \perp L$$

$$\text{Получим } x = y_1 + z_1, x = y_2 + z_2 \Rightarrow y_1 - y_2 = z_2 - z_1 \Rightarrow y_1 - y_2 = z_2 - z_1 = 0$$

Разложение H в прямую сумму:
 $H = L \oplus L^\perp$

Нужно показать, что $(L^\perp)^\perp = L$:

$$x \perp L^\perp \Rightarrow x = y + z, y \in L, z \in L^\perp$$

$$0 = (x, z) = (y, z) + (z, z) \Rightarrow z = 0 \Rightarrow x \in L$$

Лемма 2. $\dim(\ker f)^\perp = 1, f \neq 0$
Размерность ортогонального дополнения к ядру линейного функционала равна 1.

Р-во: Пусть $x_1, x_2 \in (\ker f)^\perp$. Составим элемент:

$$x = f(x_2)x_1 - f(x_1)x_2, f(x) = 0 \Rightarrow x \in \ker f$$

$x \in (\ker f)^\perp$, т.к. $\forall k \Rightarrow x = 0 \Rightarrow \dim(\ker f)^\perp = 1$, т.к. $\forall 2$ элемента линейно зависимы.

Теорема 2. (Рисса - Фреше)

В линей. пр-ве H линейный функционал непрерывен в точке $f(x) = (x, y), y \in H, \|y\| = \|f\|$

Р-во: $\{x, y\} \Rightarrow x = Px + (x, e)e \in \overset{\text{ker } f}{\text{ker } f} \oplus \overset{(\ker f)^\perp}{(\ker f)^\perp}, \|e\| = 1$.

P - ортопроектор на пр-во $\ker f$

$$f(x) = f(Px) + (x, e)f(e) = (x, f(e)e), y = f(e)e$$

Умножимся: $f(x) = (x, y) = (x, y_2) \Rightarrow (x, y - y_2) = 0, \forall x$
Получим $x = y_1 - y_2$, получим $y_1 = y_2$

Лемма 3. Пусть M - мин. многообр. в линей. пр-ве.
 $M = H \Leftrightarrow \forall H$ нет элемента, ортогонального M , кроме 0

Р-во: $\Rightarrow M = H. x \perp M \Rightarrow x \perp M - ?$

$$y \in M, x_n \rightarrow y, x_n \in M \Rightarrow (x_n, x) = 0 \Rightarrow (y, x) = 0$$

$$\Leftarrow \text{Пусть } M \neq H. \text{ Тогда } H = M \oplus M^\perp$$

$$\forall x \in M \quad x = y + z, y \in M, z \in M^\perp, z \neq 0 \Rightarrow (?)$$

Опр. Система элементов μ мин. норм. пр-ва H

$\{y_n\}_{n=1}^\infty$ наз-ся замкнутой, если $\forall \varepsilon > 0$

$$\forall f \in H \exists n/k \exists c_n \in \mathbb{R}: \|f - \sum_{n=1}^k c_n y_n\| < \varepsilon, \text{ т.е.}$$

$\forall$ элемент можно приблизить конечной комбинацией элементов системы.

Опр. μ - минимальная, если ни один из

ее элементов нельзя приблизить с наперед

заданной точностью н/к других элементов системы

Опр Система $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ в шиб. пр-ве называется ортонормированной, если $(e_i, e_j) = \delta_{ij}$.

Замечание Ортонормированная система элементов является минимальной.

Опр Беск. система минимально-независима, если $\forall$ ее подсистема минимально-независима.

$\forall$ сист. л/н элементов в шиб. пр-ве можно построить ортонорм. систему.
т.е. выделим первые n , ортонормируем, и их оболочка совпадает с оболочкой исходной. Так что?

Конструктивное построение:

$$e_1 = \frac{g_1}{\|g_1\|}, \quad h_2 = g_2 - c_{21}e_1 \\ (h_2, e_1) = 0 = (g_2, e_1) - c_{21} \Rightarrow c_{21} = (g_2, e_1) \Rightarrow e_2 = \frac{h_2}{\|h_2\|} \\ \dots \\ h_n = g_n - \sum_{k=1}^{n-1} c_{nk}e_k, \quad (h_n, e_k) = (g_n, e_k) - c_{nk} \Rightarrow c_{nk} = (g_n, e_k) \\ \Rightarrow e_n = \frac{h_n}{\|h_n\|}$$

Так в разных пр-вах строятся полные ортонорм. системы - ... и другие:

$$L_2(-1, 1) \rightarrow 1, t, t^2, \dots \\ L_2p(-\infty, +\infty) \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} g(x) h(x) dx = (g, h) \\ \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x} g(x) h(x) dx = (g, h)$$

Применение элементов

$$\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$$

$$\|x - \sum_{k=1}^n c_k e_k\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^n \overline{c_k} (x, e_k) - \sum_{k=1}^n c_k (e_k, x) + \sum_{k=1}^n |c_k|^2 \\ = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^n |c_k|^2 + \sum_{k=1}^n |c_k - c_k|^2 \Rightarrow x = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k \\ \text{можно записать} \quad \|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 \quad \text{рав-во Парсеваля}$$

Пусть $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ - о/н базис.
Построим ортонорм. систему $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$: $g_n = e_n - e_1$
тогда $(g_n, e_1) = 1$, $(g_k, e_k) = 0$

Опр Система в H полная, если не $\exists$ никакого элемента, кроме 0, ортогонального $\forall$ элементу системы.

Опр Система замкнута, если $\forall$ элемент можно приблизить с наперед заданной точностью элементами системы.

Лемма 1 О/н система полная $\Leftrightarrow$ замкнута.
Лемма 2 В о/н базисе элемент ортогонален системе $\Leftrightarrow$ $\{$ Пареваль $\}$ $\Rightarrow$ ноль
Лемма 3 Из леммы 2.

Система $\{g_n\}$ полная, во-первых; ортонормальна с системой $\{e_n\}$, ~~тогда~~ которая не полная, во-вторых.

Лемма 3 В H сопарабельном шиб. пр-ве $\exists$ о/н базис.

Лемма 4 Если $g_1, \dots, g_n, \dots$ - счётное семейство плотное мин-во то можно построить о/н базис (с ном. в. лева)

$$e_1 = \frac{g_1}{\|g_1\|} \quad \text{нормированный элемент, который не} \\ \text{попадает в мин. оболочку } e_1 \\ H = L(e_1) \oplus L^{\perp}(e_1) \Rightarrow g_2 = p_{L^{\perp}} g_2 + h_2 \neq 0 \Rightarrow e_2 = \frac{h_2}{\|h_2\|} \\ H = L(e_1, e_2) \oplus L^{\perp}(e_1, e_2) \Rightarrow \dots \text{ и так далее.} \\ \text{сенар.}$$

Теорема 4 $\forall$ 2^V шиб. пр-ва на Ω группах и для тех полных изоморфных и изометричных между собой.

Лемма 1 Для доказательства что H и l_2 .

$$\forall x \in H \quad x = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k, \quad c = (c_1, \dots, c_n, \dots) \in l_2 \\ \forall y \in H \quad y = \sum_{k=1}^{\infty} d_k e_k \Rightarrow \alpha c + \beta d = (\alpha c_1 + \beta d_1, \dots, \alpha c_n + \beta d_n, \dots) \in l_2 \\ \forall c \in l_2 \quad z_n = \sum_{k=1}^n c_k e_k, \quad \|z_n - z\|^2 = \sum_{k=n+1}^{\infty} |c_k|^2 \\ \|z\|^2 = \|c\|_{l_2}^2$$

Теорема 1' (о слабой конп. в гильб. пр-ве)
В сепараб. гильб. пр-ве $\forall$ оград. посыл-е
имеет слабо сходящуюся подпоследовательность.

Д.во: $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ $\|x_n\| \leq M$ $|(\tilde{x}_n, e_i)| \leq \|x_n\| \|e_i\| \leq M$
($\tilde{x}_n^i, e_i$) эк-ва (нормир-е)
 $|(\tilde{x}_n^i, e_i)| \leq M \Rightarrow (\tilde{x}_n^i, e_i) - \text{эк-ва} \Rightarrow$
 $\Rightarrow (\tilde{x}_n^i, e_i) - \text{тоже эк-ва}$
... $\forall z \in H$ $(\tilde{x}_m - \tilde{x}_n, z) = (\tilde{x}_m - \tilde{x}_n, z - \sum_{k=1}^m c_k e_k + \sum_{k=1}^m c_k e_k) \Rightarrow$
 $\Rightarrow |(\tilde{x}_m - \tilde{x}_n, z)| \leq \|\tilde{x}_m - \tilde{x}_n\| \cdot \|z - \sum_{k=1}^m c_k e_k\| + |(\tilde{x}_m - \tilde{x}_n, \sum_{k=1}^m c_k e_k)| < \epsilon$
где $n, m > N$ - некоторого, т.к. $\epsilon/3$ эк-ва эк-ва
по п. 2 $(\tilde{x}_n, z) \rightarrow f(z) = (x, z) \quad \forall z \in H$ (эк-ва эк-ва)

§11. Сопряженный оператор

$A: X \rightarrow Y$ - оператор, линейный, ограниченный
 $A^*: Y^* \rightarrow X^*$ - сопряженный оператор
 $\forall \varphi \in Y^* \quad \varphi(y) = \varphi(Ax) = f(x), \quad f \in X^*$
т.е. $A^* \varphi = f$ (соответствие)

A^* - лин. оператор
 $A^*(\alpha \varphi_1 + \beta \varphi_2) = \alpha A^* \varphi_1 + \beta A^* \varphi_2$

Теорема 1 $\forall$ лин. оград. опер. A сопр. оператор
и их нормы совпадают.

Д.во: существование уже показано.

$\|A\| = \|A^*\|$ - ?
 $f(x) = (A^* \varphi)(x) \quad \|A^* \varphi(x)\| = \|f(x)\| = \|\varphi(Ax)\| \leq \|\varphi\| \cdot \|Ax\| \Rightarrow$
 $\Rightarrow \|A^* \varphi\| \leq \|A\| \cdot \|\varphi\| \Rightarrow \|A^*\| \leq \|A\|$
 $\forall x_0 \quad \exists \varphi_0 \in Y^*: \|\varphi_0\| = 1 \quad \varphi_0(Ax_0) = \|Ax_0\|$
 $\|Ax_0\| = \varphi(Ax_0) = f(x_0) = A^* \varphi_0(x_0) \leq \|A^*\| \cdot \|\varphi_0\| \cdot \|x_0\| \Rightarrow \|A\| \leq \|A^*\|$
 $\frac{1}{2}$

Переходим к случаю скалярного произведения
 $A: H \rightarrow H \Rightarrow (Ax, y) = (x, A^*y)$

Теорема 2 $H = \text{Im } A \oplus \ker A^*$, т.е.
 $\ker A = \{x: Ax = 0\}$ - ядро
 $\text{Im } A = \{y: y = Ax\}$ - образ